受験番号 ________________

平成 26 年度東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成 25 年 8 月 26 日（月）13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。

2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。

3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと。

4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ。

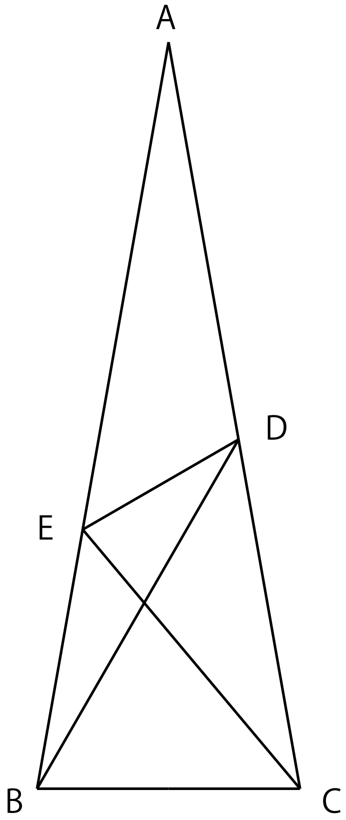
5. 計算用紙は別に配布する。試験終了後，回収する。

6. 問題は全部で 20 問ある。このうち任意の 15 問を選んで解答せよ。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけよ。
   16 問以上を選択することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第 1 問

三角形 ABC は二等辺三角形である。$\angle \mathrm{BAC} = 20^\circ$, $\angle \mathrm{DBC} = 60^\circ$, $\angle \mathrm{ECB} = 50^\circ$ であるとき，$\angle \mathrm{EDB}$を求めよ。



第 2 問

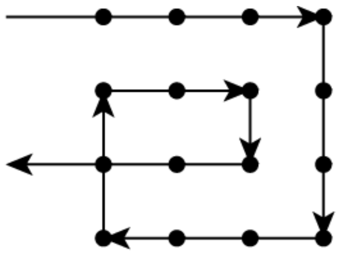
$2n-2$ 本の直線を一筆書きで引いて，等間隔に並んだ $n \times n$ ($n > 2$) のすべての格子点を通す。

1. $n = 3$ の解を，一筆書きの順路がわかるように示せ。
2. $n = 5$ の解を，一筆書きの順路がわかるように示せ。

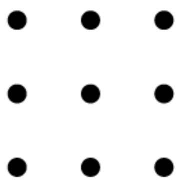
ただし，以下の条件を満たすこと。

・ 格子点を 2 回以上通ってもよい。
・ 直線が他の直線と交差してもよい。
・ すでに引いてある直線のいかなる区間も上書きしてはいけない。

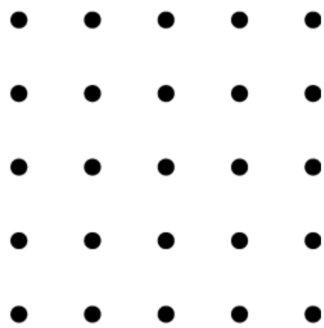
$n = 4$ のとき，6 本の直線ではなく 7 本の直線で引いた不正解の例を，下図に示す。



解答用の点格子



$n = 3$



$n = 5$

第 3 問

$10^{0.30103} = 2$ であるとする。

(1) 2^{100} は何桁の数か。

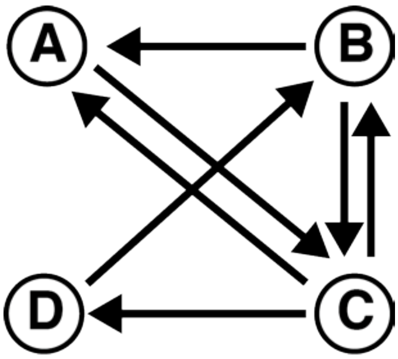
(2) 0.00025^{100}は小数第何位に，はじめて 0 でない数字が現われるか。

第 4 問

デカルト座標系において，点 P(2,1,0)を x 軸まわりに $\pi/3$ 回転させた後，y 軸まわりに $\pi/4$ 回転させた。回転には 2 つの向きがあるが，2 回の回転とも，どの向きで回転させたのか不明である。点 Pの移動先として考えられる座標をすべて求めよ。

第 5 問

ある航空会社は，空港 A，B，C，D を下図のようにつなぐフライト網を所有している。
空港 C を起点として，最大 4 回のフライトで，A，B，D の各空港に到達する順路の数をそれぞれ答えよ。ただし，何回でも各空港を経由することができる。また最終目的の空港を，経路の途中で経由してもよいこととする。



第 6 問

次式のように，9 桁の自然数 A を 8 桁の自然数 B で割ると 89 となる。各□は 0 から 9 までの整数を表している。A と B を求めよ。ただし，□には同じ整数を何度用いてもよい。

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\square\square 3\ 4\ 5\ 6\ 7\square\square}{\square\square\square 1\ 2\square\square\square}=89$$

第 7 問

次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^3$$

第 8 問

行列

$$\begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

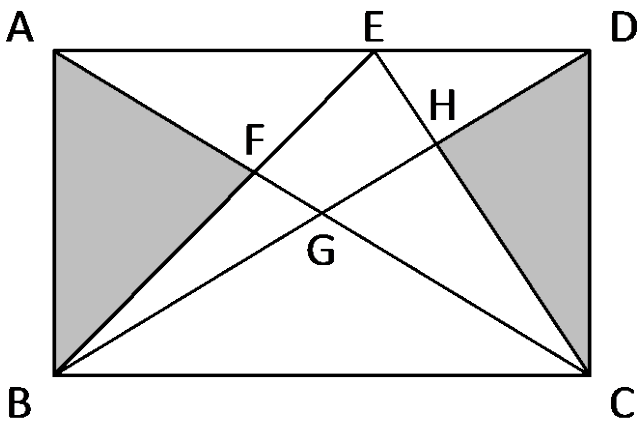
の階数が 2 となる c の値を求めよ。

第 9 問

n 人がそれぞれ異なる一つの情報を持っている。彼らは電子メールをやり取りすることで，情報を互いに共有したい。送信者は，電子メールを送信する時点における自分の知っている全ての情報を電子メールに書くことができるが，一つの電子メールは一人の受信者（宛先）にしか送れない。最初に各自が持っている情報を n 人全員が共有するために，必要な最小の電子メールの送信数を求めよ。その際，どのように導出したかも記述せよ。

第 10 問

辺 AB の長さが 6 cm，辺 BC の長さが 9 cm の長方形 ABCD において，三角形 ABF と三角形 CDH の面積の和が 19 cm^2 のとき，四角形 EFGH の面積は何 cm^2 か。



第 11 問

曲面 $z = 2\sqrt{6 - x^2 - y^2}$ 上の点$(1, 1, 4)$における接平面の方程式を求めよ。

第 12 問

Nが自然数で，$100000 \leq N^2 \leq 2500000$のとき，$N^2$の上３桁を取り出した数は，いくつあるか。ただし，$1000000$と$1002001$ のように，上３桁が同じ数の場合は，重複してかぞえない。

第 13 問

100 人の学生が 100 点満点のテストを受けた。
全学生の合計点が 4900 点だったとき，同じ点数を取った学生がいることを示せ。ただし，点数は非負の整数とする。

第 14 問

毎年，A 国ではその人口の $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ の割合の人が B 国に移り，B 国ではその人口の $\beta\ (0 < \beta < 1)$ の割合の人が A 国に移る。なお, 人口の増減はこの移動のみによって起こり，A 国の人口と B 国の人口の和は常に一定であるとする。

(1) ある時点で A 国の人口と B 国の人口はそれぞれX_0とY_0であった。その時点から 10 年後の A 国の人口をX_0，Y_0，αとβを用いて表せ。

(2) $\beta = 2\alpha$ のとき，無限年後における A 国と B 国の人口比率を求めよ。

第 15 問

多項式 $P(x)$を $x^3+2x^2-13x+10$ で割ったときの余りが $2x+1$ であり，また，$P(x)$ を $x^3+4x^2-15x-18$ で割ったときの余りが $2x^2-x-4$ である。
このとき，$P(x)$ を $x^3-19x+30$ で割ったときの余りを求めよ。

第 16 問

次の無限級数の収束・発散を根拠と共に答えよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

第 17 問

点 A，B はそれぞれ直線 $y = x$，$y = 2x$ 上にある。線分 AB の長さが 6 であるとき，線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の軌跡を表す方程式を求めよ。

第 18 問

(1) 次の関係があるとき，Fa の値は何か。

$\mathrm{Af}=-5,\ \mathrm{CC}=6,\ \mathrm{pH}=-8,\ \mathrm{Hg}=1,\ \mathrm{gk}=-18$

(2) 次の関係があるとき，12×6 の値は何か。

$2\times 3=6,\ 2\times 4=11,\ 3\times 3=12,\ 4\times 5=26,\ 6\times 5=42,\ 13\times 14=215$

第 19 問

ある町で，ガソリンスタンド A 店と B 店が競合している。販売されているガソリンは 1 種類だけで，その仕入れ価格は 60 [円/L]である。まず，A 店がガソリンを x_A [L] 仕入れ，B 店は x_A [L]を知った後に B 店の利益を最大化するようにガソリンを x_B [L] 仕入れる。ガソリンの販売価格 P [円/L]は，以下の関係式によって決められ，仕入れたガソリンは全て売れるとする。

$$P = \begin{cases} 200 - \dfrac{x_A + x_B}{1000} & (x_A + x_B \leq 140000) \\ 60 & (x_A + x_B > 140000) \end{cases}$$

A 店の利益を最大化する x_A を求めよ。

第 20 問

9 本の同じ長さのマッチ棒を用いて，同じ面積の正方形 3 つと，同じ面積の正三角形 2 つを同時に有する図形を示せ。