受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿

平成 25 年度東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成 24 年 8 月 27 日（月）13:00〜15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと。
4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ。
5. 計算用紙は別に配布する。試験終了後，回収する。
6. 問題は全部で 20 問ある。このうち任意の 15 問を選んで解答せよ。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけよ。
   16 問以上を選択することはできないので注意すること。

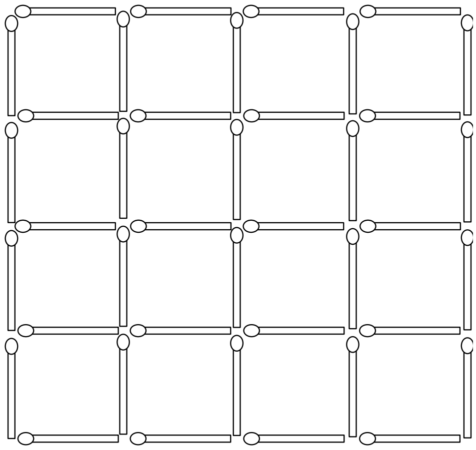
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第 1 問

二人のプレイヤーA と B が，確率 p ($0<p<1$) で表が出るコインでゲームを行う。コインの表が出た場合はプレイヤーA の持ち点が 1 点加算され，B は 1 点失う。コインの裏が出た場合はプレイヤーB の持ち点が 1 点加算され，A は 1 点失う。いずれかのプレイヤーの持ち点が 0 になるとゲームは終了し，持ち点が残っているプレイヤーが勝者となる。プレイヤーA, B がそれぞれ持ち点 m と n でゲームをスタートするとき，プレイヤーA が勝つ確率を求めよ。ただし，m と n は正の整数とする。

第 2 問

40 本の同じ長さのマッチ棒で作られた右の図形がある。この図形には，1 本のマッチ棒を一辺とする正方形が 16 個, 2 本のマッチ棒を一辺とする正方形が 9 個，3 本のマッチ棒を一辺とする正方形が 4 個，4 本のマッチ棒を一辺とする正方形が 1 個含まれている。この図形から 9 本のマッチ棒を取り去り，どこにも正方形が存在しないようにしたときの図形を描け。ただし，残ったマッチ棒は動かしてはならない。



第 3 問

旅人が，本当のことしか言わない正直族とウソのことしか言わないウソツキ族の 2 つの種族が住んでいる村にやってきた。次の問いに答えなさい。

(1) 5 人の村人が集まっていて，それぞれが以下のように言った。

村人 A「私たちのうちの 1 人だけがウソツキ族だ。」

村人 B「私たちのうちの 2 人がウソツキ族だ。」

村人 C「私たちのうちの 3 人がウソツキ族だ。」

村人 D「私たちのうちの 4 人がウソツキ族だ。」

村人 E「私たち全員がウソツキ族だ。」

村人 A〜村人 E のそれぞれについて正直族かウソツキ族か判断しなさい。その理由も書きなさい。

(2) 別の 2 人の村人に会った。2 人に「あなたたちは同じ種族ですか？」と聞いた。それぞれの答えで，2 人のそれぞれの種族がわかるという。その理由を説明せよ。

第 4 問

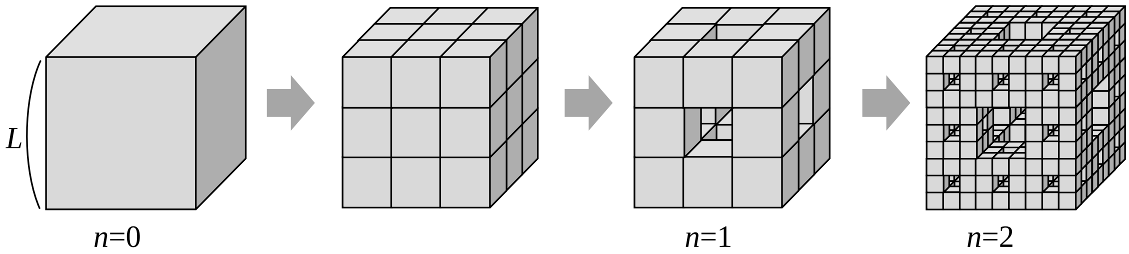
以下の方程式を解け。ただし，x は実数とする。

$$x^2+4x-33=-2\sqrt{x^2+4x+15}$$

第 5 問

図のように一辺の長さが L の立方体から始めて，以下の手順を n 回繰り返し，立方体の集合からなる図形を作る。

(手順)
各立方体の各辺を 3 等分して 27 個の小さな立方体に分割する。このうち，中心の小さな立方体 1 個と，各側面の中央の小さな立方体 6 個を取り除く。



このとき，以下の問いに答えよ。

(1) n 回繰り返した後に得られる図形の体積を求めよ。

(2) n 回繰り返した後に得られる図形の表面積を求めよ。

第 6 問

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$ かつ，n が自然数ならば,

$$\mathbf{P}^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$ となることを証明せよ。

ただし，$a+b\neq 0$ とする。

第 7 問

N を 2 以上，かつ，700 以下の整数とする。N^2-1 が 280 の倍数であるような N は何個あるか。

第 8 問

2 つの円柱 $x^2+y^2\leq 1$，および，$y^2+z^2\leq 1$の共通部分の体積を求めよ。

第 9 問

$y'' + 6y' + 9y = xe^{-2x}$ を満たす関数 $y(x)$ の一般形を求めよ。

第 10 問

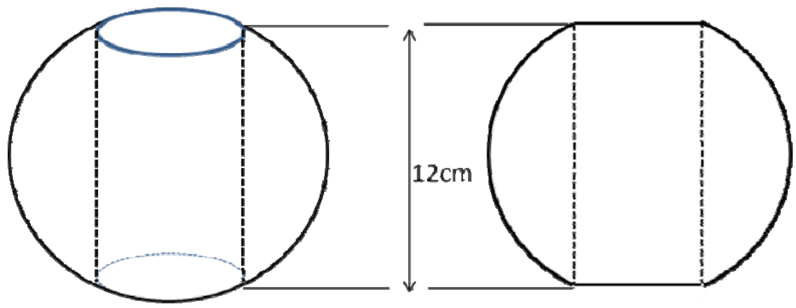
次の式に当てはまる整数 a, b, c を求めよ。

$$6 \div 11 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \times \frac{1}{c}$$

ただし，$c > a > 0$ かつ $c > b > 0$ である。

第 11 問

図のように，球状リング（円柱状の穴がくり抜かれた球）があり，穴の高さが 12cm であることが分かっている。このとき，球状リングの体積を求めよ。ただし，円柱の中心軸が球の中心を通るものとする。



第 12 問

式： $r = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$ について以下の問いに答えよ。

(1) $(X, Y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 座標系で上式により表される曲線を描け。

(2) この曲線の長さを求めよ。

第 13 問

並んで置かれた 2 つの袋があり，一方には白玉が 2 個と黒玉が 8 個，もう一方には白玉が 6 個と黒玉が 4 個入っている。最初の人が左側の袋から玉を 1 つ取り出したら白だった。2 番目の人が右側の袋から玉を 1 つ取り出したら黒だった。一人が取り出す玉の数は 1 つだけで，一度取り出した玉は袋に戻さないものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 番目の人が左側の袋から玉を 1 つ取り出したとき，それが白玉である確率を求めよ。

(2) 3 番目の人が右側の袋から玉を 1 つ取り出したとき，それが白玉である確率を求めよ。

第 14 問

以下の問いに答えよ。ただし，

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

を用いてよい。

(1) $m^5-(m-1)^5$ を m の 4 次多項式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^4$ を求めよ。

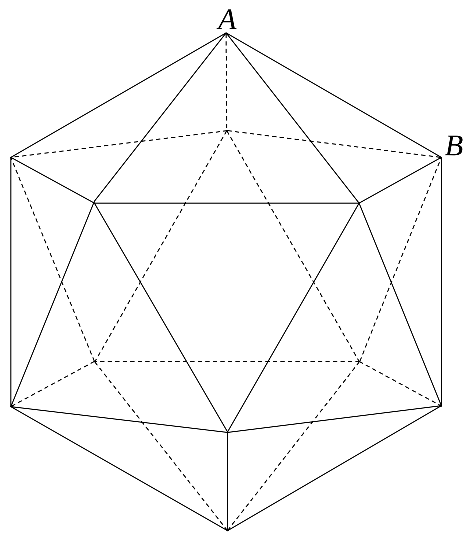
第 15 問

直交座標系において, 一辺の長さが 2 の正二十面体（各面は正三角形）の各頂点の座標を,

$(0, \pm 1, \pm p), (\pm 1, \pm p, 0), (\pm p, 0, \pm 1)$（複号任意）

$$\text{ただし } p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

で与える。この正二十面体の，ある 1 つの面を含む平面への正射影は右のような図形である。この正射影の最も外側の正六角形の一辺 AB の長さを求めよ。



第 16 問

与えられた 4 つの数のそれぞれを 1 回ずつと，四則演算（$+-\times\div$），かっこを用いて，答が 10 となる計算式を考える。たとえば，与えられた 4 つの数字の組が $(2, 3, 6, 7)$ であれば $(7-2)\times 6\div 3$，$(9, 9, 9, 9)$ であれば $(9\times 9+9)\div 9$ である。

(1)　4 つの数字の組 $(1, 1, 9, 9)$ に対して，答が 10 となる計算式を 1 つ見つけよ。

(2)　4 つの数字の組 $(1, 1, 5, 8)$ に対して，答が 10 となる計算式を 1 つ見つけよ。

第 17 問

天秤で 1kg 以下のあらゆる重さの物体を 1g 単位で量りたい。天秤の一方にはその物体，他方には幾つかの分銅を置く。用意しておくべき最低限必要な分銅の数はいくつか。また，そのときの分銅の質量の組み合わせの例を 1 つ答えよ。ただし，用いることができる分銅は 1g 単位とする。

第 18 問

有界閉領域 $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ (ただし，x, y, a, b は実数で $a>0$, $b>0$ とする) において，次の二重積分を求めよ。

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$$

第 19 問

$x, u, v,$を実数，a, τを実定数とする。次の連立微分方程式を解いて u, v を求めよ。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a^2 v = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2a^2 u = 0 \end{cases}$$

ただし，境界条件は

$x = 0$ のとき $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\tau,$

$x = \pm\infty$ のとき $u = v = 0,$

とする。

第 20 問

E_1ーE_7 はそれぞれ 1 桁の偶数，および，O_1ーO_4 はそれぞれ 1 桁の奇数である。以下の掛け算を満たすように，それぞれに具体的な数字を当てはめよ。ただし，同じ数字を何度使ってもよい。

$$
\begin{array}{rrr}
 & E_1 & O_1 \\
\times & O_2 & E_2 \\
\hline
 & O_3 & E_3 \\
E_4 & O_4 & \\
\hline
E_5 & E_6 & E_7
\end{array}
$$