受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿

平成 24 年度東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成 23 年 8 月 29 日（月）13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと．
2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること．
3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ．それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと．
4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ．
5. 計算用紙は別に配布する．
6. 問題は全部で 20 問ある．このうち任意の 15 問を選んで解答せよ．
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に〇をつけよ．
   16 問以上を選択することはできないので注意すること．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第１問

二重積分 $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dy \, dx$ の積分順序が入れかえられることを利用し，積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ を求めよ.

第２問

関数 $x(t)$ に関する次の微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)$ を， $t=0$ における初期条件 $x(0)=x_0\,(\neq 0, K)$ のもとに解け．ただし，r, K は定数とする．

第３問

次の関数の導関数を求めよ.

$$(e^{2x} + x^2 + 1)^{x^3 + \cos x}.$$

第４問

A, B, C の 3 人で試合を行う．1 試合目は，A 対 B で行い，次の試合からは，勝者が残りの 1 人と試合を行う．2 回連続して勝てば優勝であり，誰かが優勝するまで繰り返す．A, B, C のいずれも，各試合で勝つ確率が 5 割であるとする．

（１）4 試合以内に A が優勝する確率を求めよ．

（２）A が優勝する確率を求めよ．

第５問

次の問に答えよ．

（１） $0<x<\pi$ に対し，次を示せ．ただし、n は自然数.

$$\left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\right\}\cdots\left\{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\}=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\ .$$

（２）次の式を計算せよ．

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

第６問

時刻 t の複素関数 $s(t)$ が次式で定義されている．

$$s(t) = \begin{cases} \exp(it^2) & |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases} .$$

τ が正または 0 のとき，次式の定積分 $g(\tau)$ を計算せよ．ただし，$s^*(t)$ は $s(t)$ の複素共役関数，T は正の定数，i は虚数単位を表すものとする．

$$g(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau + t)s^*(t)dt \qquad (\tau \ge 0) .$$

第７問

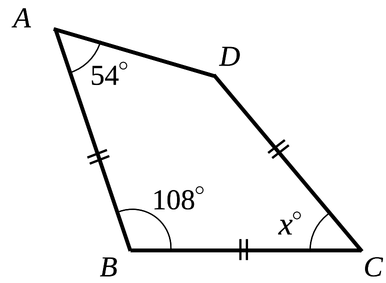
微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ を満たす関数 $y(t)$ を求めよ．ただし，$y(0)=0$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1$ とする．

第８問

一辺の長さが 1 の正三角形がある．まず，この正三角形に内接する円を描く．次に，描いた円と正三角形の二辺に接し，かつ，これまでより小さい円をすべて描く．この手続きを無限に繰り返すとき，すべての円の円周の和と正三角形の外周はどちらがどれだけ長いか答えよ．

第９問

辺 AB, 辺 BC, 辺 CD の長さが等しいとき, $\angle BCD$ の大きさを求めよ.



第 10 問

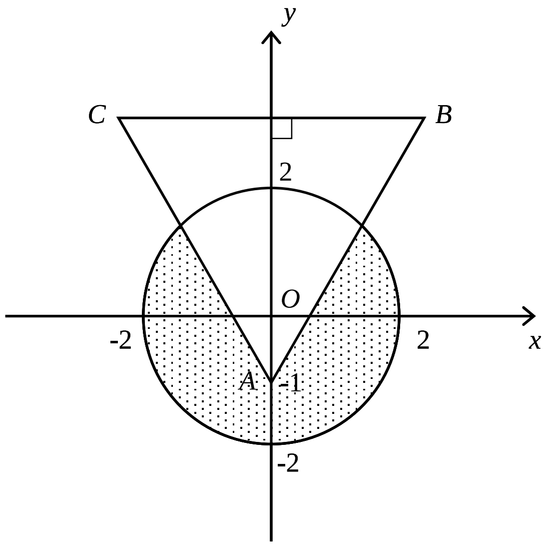
円に内接する四角形 $ABCD$ を考える．ただし，辺 BC は辺 DA よりも長く，かつ，辺 AB は辺 CD よりも長いとする．そして，辺 AB, 辺 DA, 対角線 BD, またはそれらの延長線への，頂点 C からの垂線の足を，それぞれ E, F, G とする．このとき，$\angle EGF$ の大きさを求めよ．

第 11 問

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, b は実数)で表される楕円を, 原点 O を中心として xy 平面内で回転させる.
今，各辺が x 軸または y 軸に平行，かつ，この楕円に外接する長方形を考える．このとき，長方形の面積 S の最大値と最小値を求めよ.

第 12 問

図に示すように，原点を中心とする半径 2 の円と頂点 $A(0, -1)$を持ち，辺 BC が x 軸に平行で，かつ，B，C の y 座標が 2 より大きい正三角形 ABC がある．この円から，正三角形 ABC との共通部分を切り取り，y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ．



第 13 問

一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形の各頂点を中心に半径 1 の円をそれぞれ描くとき，3 個の円の共通部分の面積を求めよ．

第 14 問

次に示す計算は六進法の加算である．O, N, E, T, W は 1〜5 の数字であり，異なる文字には異なる数字が対応する．各文字に対応する数字を求めよ．

$$\begin{array}{rr} & \mathrm{ONE} \\ + & \mathrm{ONE} \\ \hline & \mathrm{TWO} \end{array}$$

第 15 問

下図には“BORROW OR ROB”という文を綴るための文字が並んでいる．文字列を 1 文字ずつ順に進んでこの文を綴る異なる方法は何通りあるか．ただし，進み方は上下左右のみであり，斜めには進めない．

```
          B
        B O B
      B O R O B
    B O R R R O B
  B O R R O R R O B
B O R R O W O R R O B
  B O R R O R R O B
    B O R R R O B
      B O R O B
        B O B
          B
```

第 16 問

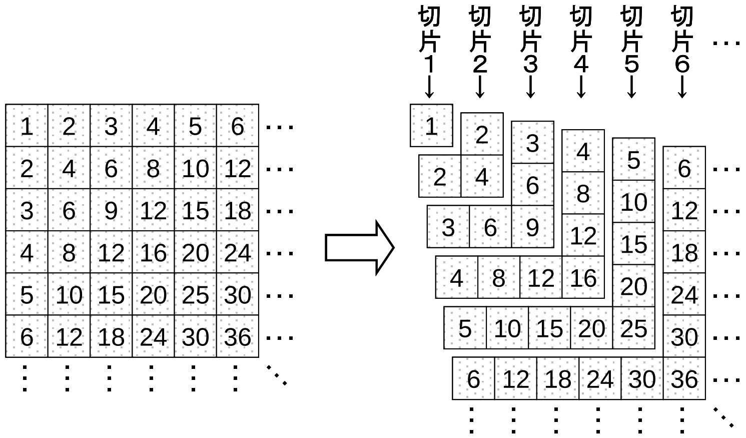
6^{2011} を 100 で割った余りを求めよ.

第 17 問

まず下図左のように整数を並べ，その後，下図右のように左上から切片に分割していくことを考える。すると，切片 n に書かれている数の和は n^3 になる.

一方, 1 から n までの n 個の整数の三乗の和は，$\sum_{k=1}^{n} k^3 = an + bn^2 + cn^3 + dn^4$ で表される.

図を利用して，a, b, c, d を求めよ.



第 18 問

最初，テーブルの上にトランプのカード 52 枚が全て裏向けにして一列に並べられていた．1 人目がやってきて，全てのカードを表にして行った．2 人目がやってきて，左端から偶数枚目のカードを全てひっくり返して行った．3 人目がやってきて，左端から 3 枚目，6 枚目，9 枚目，・・・と 3 枚おきにカードをひっくり返して行った．N 人目がやってきて，左端から N 枚目ごとのカードをひっくり返して行った．最後に 52 人目がやってきて，右端のカードをひっくり返して行った．52 人目が行ってしまった後，表を向いているカードは何枚あるか．

第 19 問

$4n^2+3m-mn=0$を満足する自然数 m, n の組をすべて求めよ.

第 20 問

$(n+2)!-n!$ が 11^6 で割り切れるような最小の自然数 n を求めよ.