受験番号 ____________________

平成23年度東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成22年8月30日（月）13:00〜15:30

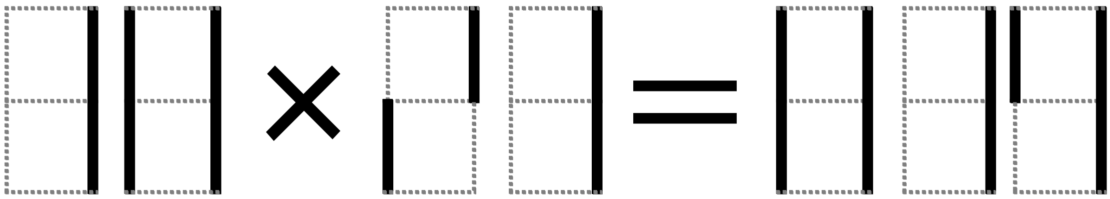
注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと。
4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ。
5. 計算用紙は別に配布する。
6. 問題は全部で20問ある。このうち任意の15問を選んで解答せよ。
   <u>選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけよ。</u>
   <u>16問以上を選択することはできないので注意すること。</u>

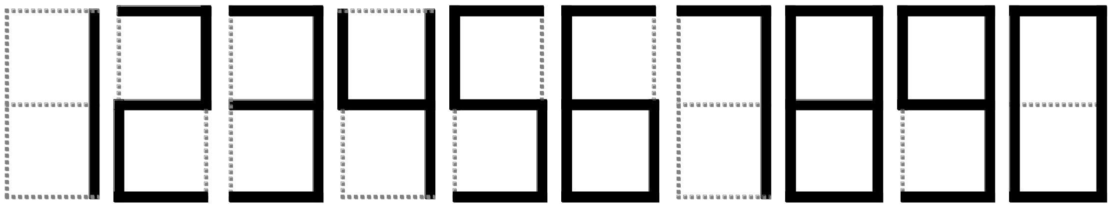
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第 1 問

下図は掛け算の計算式で，数字をある電卓の表示で示したものである。ただし，電卓の表示機能が一部壊れており，数字の縦棒はすべて表示されるが横棒は何も表示されない。計算式を復元せよ。



なお，壊れる前の電卓の数字表示は以下のとおりである。



第 2 問

ある専攻の修士課程には 100 名の学生が在籍している。そのうち日本人学生は 70 名，留学生は 30 名である。また，100 名のうち男性は 60 名，留学生は男性より女性の方が多いことがわかっている。

（1）日本人学生の女性の人数がとりうる範囲を答えよ。

（2）100 名のうち 60 名の学生が講義 A を履修しており，そのうち少なくとも半数は女性であることがわかっている。講義 A の履修生のうち日本人学生の人数がとりうる範囲を答えよ。

第 3 問

次の行列 A の n 乗を求めよ。n は正の整数とする。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

第 4 問

ある自然数を 2 で割れば 1 余り，3 で割れば 2 余り，4 で割れば 3 余り，5 で割れば 4 余るものとする。このような数のうち，最小のものを求めよ。

第 5 問

次の関係がすべての正の整数 n に対して成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ。

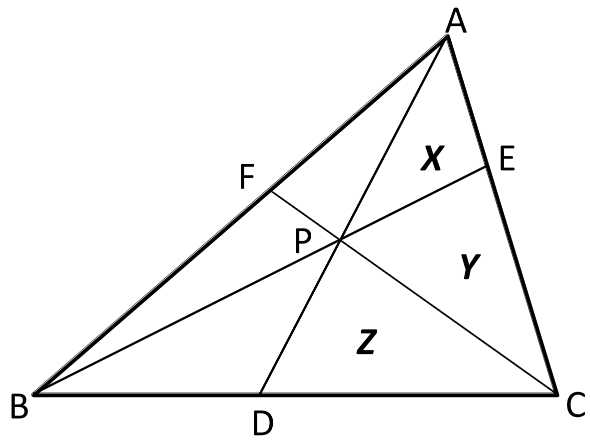
$$2^n < \frac{3^n}{n}$$

第 6 問

底面の円の半径が $\sqrt{3}$, 高さが 3 の円錐に内接する球がある。円錐の体積と球の体積の比を求めよ。

第 7 問

図に示すように，△ABC の内部に1点 P をとり，AP の延長とBC の交点をD とし，BP の延長とCA の交点をE とし，CP の延長とAB の交点をF とする。△APE，△EPC，△CPD の面積を，それぞれ X，Y，Z とするとき，△ABC の面積をX，Y，Z を用いて表せ。



第 8 問

次の関数を x で微分せよ。ただし，x は正の実数とする。

$$f(x) = x^x$$

第 9 問

2 つのベクトル　$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$　と　$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$　の両方に垂直で，大きさ 3 のベクトル $\mathbf{c}$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ はそれぞれ x，y，z 軸方向の単位ベクトルである。

第 10 問

次のように 4 桁の整数 ADCF と GBHD を足して 5 桁の整数 ABCDE になる足し算が成り立つ。足し算の答えである ABCDE を求めよ。ただし，各アルファベットは 0 から 9 までの異なる整数を表している。

	A	**D**	**C**	**F**
+	**G**	**B**	**H**	**D**
A	**B**	**C**	**D**	**E**

第 11 問

ある病気 V にかかっているかどうかの検査がある。検査結果には陽性と陰性があり，陽性の場合には V にかかっていることが強く疑われるが，稀に V にかかっていなくても検査結果が陽性となることがある。逆に，稀に V にかかっていても検査結果が陰性になる場合もある。ここで，V にかかっている場合に検査結果が陽性となる確率を 0.9，V にかかっていない場合に検査結果が陰性となる確率を 0.8，そして，実際に V にかかっている人は 5 人に 1 人の割合でいるものとする。今ある人が検査を受けて，結果が陽性になった。この人が V にかかっている確率を求めよ。

第 12 問

n は任意の正の整数とする。n^{100} を 10 進数で表したとき，取り得る一の位の数字をすべて求めよ。

第 13 問

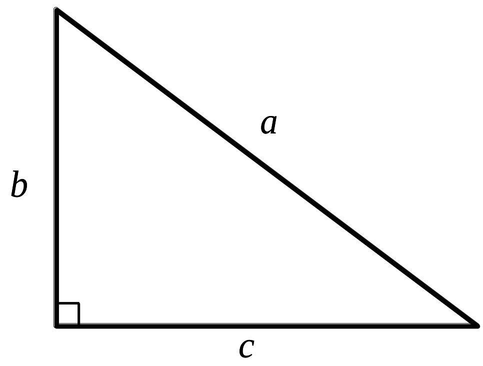
酸素原子の同位体には ^{16}O， ^{17}O， ^{18}O の三種類があり，各々の天然存在比（個数比）は 99.76%， 0.04%， 0.20%である。原子はランダムに結びつくものとして，酸素分子のうち分子量 34 の酸素分子の存在割合は何%か算出せよ。

第 14 問

xy 平面上の曲線 $y = \log_e (1 - x^2)$ について，$-0.5 \leq x \leq 0.5$ の部分の曲線の長さを求めよ。

第 15 問

斜辺の長さが a , 他の 2 辺の長さが b , c の直角三角形について, b , c のどちらか一方は必ず偶数であることを証明せよ。ただし, a , b , c は自然数である。

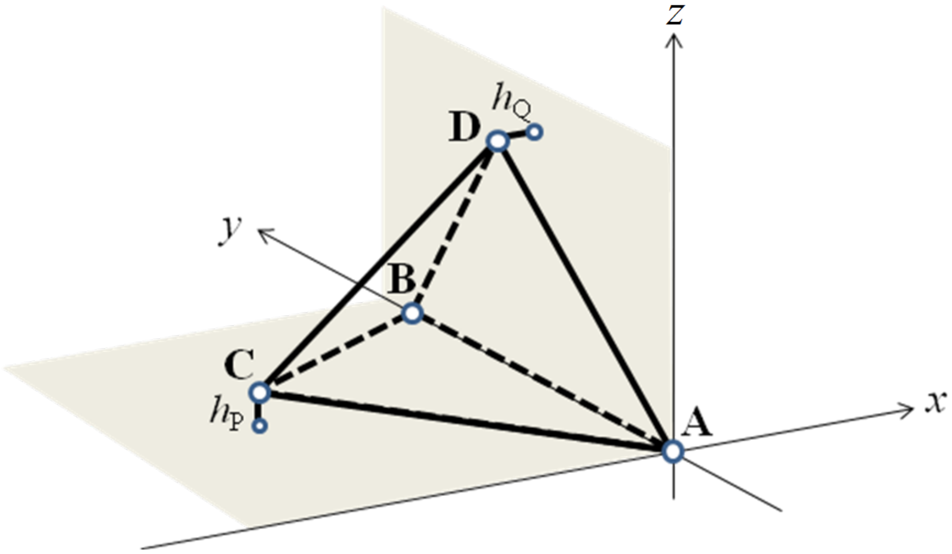


第 16 問

1 回 300 円で引けるくじ引きがある。くじには 1 から 4 のいずれかの番号が書かれていて，4 種類の景品のうち，番号に対応する景品と交換することができる。くじ引きを続けて，4 種類全ての景品を手に入れるまでにかかる費用の期待値を求めよ。ただし，くじは 1 から 4 の番号が等確率で出るものとし，これはくじを引き続けても変わらないものとする。

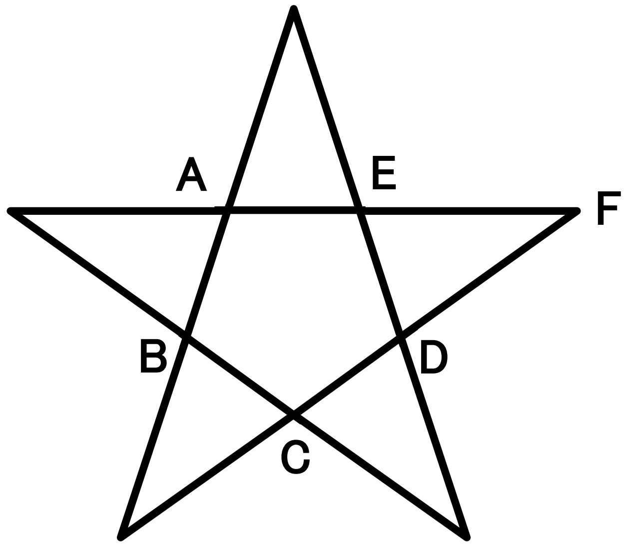
第 17 問

辺の長さ 1 の正四面体 ABCD の辺 AB が図のように y 軸上にあるものとする。
頂点 C から xy 平面に下ろした垂線の足と頂点 C の距離を h_P , 頂点 D から yz 平面に下ろした垂線の足と頂点 D の距離を h_Q とする。$h_P = h_Q$ のとき，h_P の長さを求めよ。



第 18 問

図に示すように，一辺の長さ 1 の正五角形 ABCDE の各辺を延長して作った星形がある。直線 AE と CD の交点を F とするとき，線分 EF の長さを求めよ。



第 19 問

ある道路を渡るために，歩行者は 1～5 分の待ち時間を要する。待ち時間 x [分]の確率密度関数 $f(x)$ は，区間[1, 5]において，次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{5}{4x^2}$$

歩行者がこの道路を渡るために 2 分以上待たされる確率を求めよ。

第 20 問

変数 x と y の間に次の関係式が成り立つ。$x = 2$，$y = 1$ における微分係数 dy/dx を求めよ。

$x^2 - 2xy + y^3 = 1$