受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
平成 21 年度大学院修士課程

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

入学試験問題および解答用紙

平成 20 年 9 月 1 日（月）13:00〜15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。

3. このページの最上部の欄に受験番号のみを記入しなさい。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません。

4. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き，四角の中に答えを記入しなさい。

5. 計算用紙は別に配布します。

6. 問題は全部で 20 問あります。このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に〇をつけなさい。
   16 問以上を選択することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第１問

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

とするとき，次の行列 A に対して， A^n を求めよ。ただし，n は正の整数，i は虚数単位とする。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

第 2 問

9 つの文字 AAAABBCCC を横一列に無作為に並べるとき，AABCCCBAA のように左右対称な配列となる確率を求めよ。

第 3 問

関係式

$$lmn = 2l + m + n, \quad l \geq m \geq n$$

を満たす正の整数 (l, m, n) の組を全て求めよ。

第 4 問

箱X，箱Yには，それぞれに黒玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で玉 1 個を無作為に選び交換する。N 回の試行後に，最初と同じ状態になっている確率を求めよ。

第 5 問

半径 r の球を考える。これが x-y 平面 $(z=0)$ と交わる円の半径を a， y-z 平面 $(x=0)$ と交わる円の半径を b，z-x 平面 $(y=0)$ と交わる円の半径を c とするとき，座標の原点と球の中心との距離を求めよ。

第 6 問

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

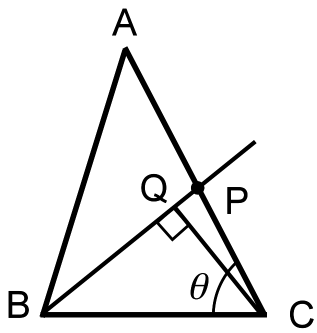
を求めよ。

第７問

半無限区間 $0 \leq x < +\infty$ において関数 e^{-x} と関数 $e^{-x}\sin x$ に挟まれる領域の面積を求めよ。

第 8 問

辺 AC の長さが 4, 辺 BC の長さが 3 の三角形 ABC を考え，$\angle \mathrm{ACB} = \theta$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ とおく。辺 AC の中点を P とし，点 C から直線 BP に垂線 CQ を引くとき，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を θ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



第 9 問

Fig. 1 に示すベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて，Fig. 2 のような平行六面体 V_1 を作る。この平行六面体の各面の中心と 2 頂点を用いて，Fig. 3 のような六面体 V_2 を平行六面体 V_1 の内部に作る。$\vec{a} = (3, 1, 0)$，$\vec{b} = (2, 3, 1)$，$\vec{c} = (1, 1, 3)$ とするとき，V_2 の体積を計算せよ。

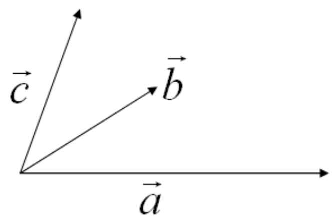


Fig. 1

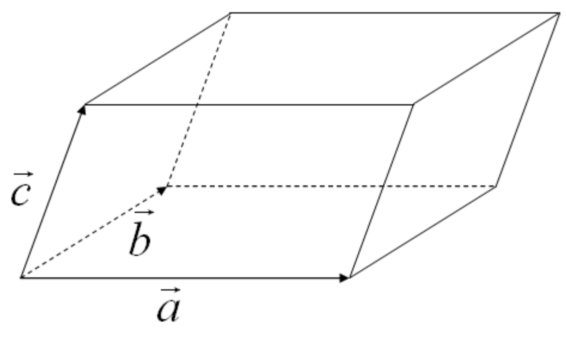


Fig. 2

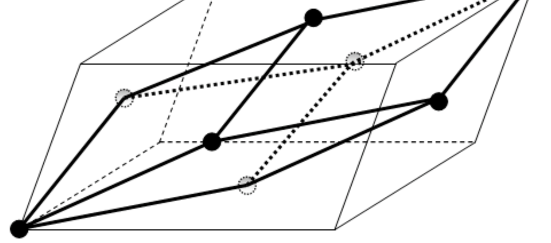


Fig. 3

第 10 問

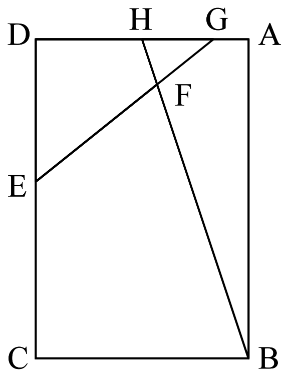
球面 S_1： $x^2+y^2+z^2=1$ と球面 S_2： $x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z+1=0$ が交わる円の面積を求めよ。

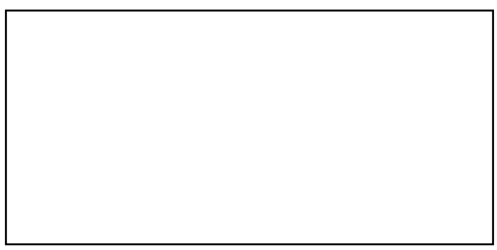
第 11 問

点 P は円: $x^2 + y^2 = 1$ の周上の任意の位置をランダムに占めることができるものとする。今，変数 X は，点 P と点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の距離を表すものとする。変数 X の平均値を求めよ。

第 12 問

図に示す長方形 ABCD 中の四角形 EFBC の面積を求めよ。ただし, 辺の長さは, AG = 1, GH = 2, HD = 3, DE = 4, EC = 5 である。





第 13 問

図の 4×4 のマス目に 1 から 16 の数字を，縦，横，対角線の和がすべて同じになるように置く。このとき，A，B を求めよ。

4		15	B
5	11		
	7		12
A			13

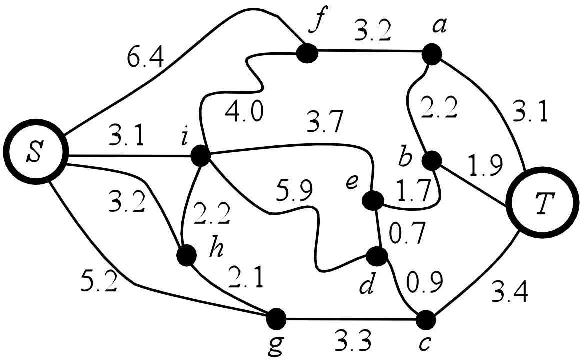
第 14 問

$$\left(\sqrt{3}i-1\right)^{10}+\left(-\sqrt{3}i-1\right)^{10}$$

を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

第 15 問

下図のグラフにおいて，S と T の間の最短経路を求めよ。ただし，枝の傍の数字は対応する枝の長さを示している。



第 16 問

次の虫食い算のＡに入る数字を求めよ。

□□

×□□８

□□□

００

□□

１□６Ａ□

第 17 問

P と Q を以下のように決める。P と Q は収束するものとする。

$$P = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}}$$

$$Q = a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cdots}}}$$

$P = Q$ となるとき，a の値を求めよ。ただし，$a > 0$ とする。

第 18 問

分数において，分子に 4 個の数字の掛け算を，分母に 3 個の数字の掛け算をおこない，その結果が 1 になるとする。

$$\frac{\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square}=1$$

このとき，分子と分母に 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 の 7 個の数字を 1 回だけ使うことを考える。この場合の 4 個と 3 個の組み合わせについて全て求めよ。

第 19 問

1 から 1000 までの自然数のうち 3 の倍数もしくは 3 がつく数はいくつあるか。

第 20 問

次の２つの例は，あるルールに基づいて作られた暗号である。

(49, 75, 113, 126, 129): key 37 = labor

(71, 45, 53, 67, 112, 82): key 31 = invest

このルールに基づくと，以下の暗号は何と読むことができるか？

(106, 112, 77, 107, 92, 71): key 29 = ???